MATEMÁTICAS BÁSICAS

PRODUCTOS NOTABLES

CONCEPTO DE PRODUCTO NOTABLE

Tanto en la multiplicación algebraica como en la aritmética se sigue un algoritmo cuyos pasos conducen al resultado. Sin embargo, existen productos algebraicos que responden a una regla cuya aplicación simplifica la obtención del resultado. Estos productos reciben el nombre de *productos notables*.

Se llama producto notable al que puede ser obtenido sin efectuar la multiplicación término a término. A continuación se describen los más importantes.

CUADRADO DE UN BINOMIO

El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de cuadrado de un binomio.

El desarrollo del cuadrado del binomio $a+b$ se puede obtener multiplicando término a término:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

"*El cuadrado de un binomio $a+b$ es igual al cuadrado del primer término más el doble del producto de los términos más el cuadrado del segundo término*".

Ahora, al elevar al cuadrado el binomio $a-b$, también multiplicando término a término, se obtiene:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

"*El cuadrado de un binomio $a-b$ es igual al cuadrado del primer término menos el doble del producto de los términos más el cuadrado del segundo término*".

En las fórmulas anteriores a y b pueden ser cualquier expresión algebraica y tener cualquier signo. Por lo tanto, segunda la fórmula es un caso particular de la primera ya que:
$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+b^2=a^2-2ab+b^2$

Ejemplos.

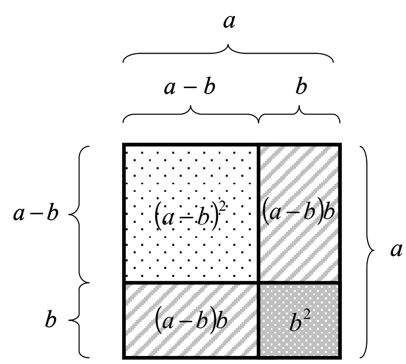
1) $(a+4)^2=a^2+2(a)(4)+4^2=a^2+8a+16$
2) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$
3) $(b-5)^2=b^2+2(b)(-5)+5^2=b^2-10b+25$
4) $(6k-8m)^2=(6k)^2+2(6k)(-8m)+(-8m)^2=36k^2-96km+64m^2$
5) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{5}{4}b\right)^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2+2\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{4}b\right)+\left(\frac{5}{4}b\right)^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{5}{3}ab+\frac{25}{16}b^2$
6) $(7p^2-9q^3)^2=(7p^2)^2+2(7p^2)(-9q^3)+(9q^3)^2=49p^4-126p^2q^3+81q^6$
7) $(-2k+5)^2=(-2k)^2+2(-2k)(5)+5^2=4k^2-20k+25$

Representación geométrica de $(a+b)^2$:

Consiste en considerar el área de un cuadrado de lados $a+b$ y las regiones que estas medidas generan en el cuadrado. Los segmentos a y b horizontales y verticales dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado a y otro menor de lado b, y dos rectángulos de largo a y ancho b. La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado $a+b$:

Representación geométrica de $(a-b)^2$:

Consiste en considerar el área de un cuadrado de lados a. Los segmentos $a-b$ y b horizontales y verticales dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado $a-b$ y otro menor de lado b, y dos rectángulos de largo $a-b$ y ancho b. La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado a^2. Por lo tanto, el área del cuadrado de $a-b$ es igual al área total menos el área de los rectángulos menos el área del cuadrado menor, esto es: $(a-b)^2 = a^2 - 2(a-b)b - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$



$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

CUADRADO DE UN POLINOMIO

El producto de un trinomio por sí mismo recibe el nombre de cuadrado de un trinomio.

El desarrollo del cuadrado del trinomio $a+b+c$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

ordenando se tiene

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Por su parte, el desarrollo del cuadrado del polinomio de cuatro términos $a+b+c+d$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= [(a+b)+(c+d)]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2\end{aligned}$$

ordenando se llega a:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

En general, *el cuadrado de un polinomio está dado por la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos más el doble producto algebraico de sus términos, tomados de dos en dos*.

Ejemplos.

1) $\left(a+2b+3c\right)^2 = a^2+\left(2b\right)^2+\left(3c\right)^2+2\left(a\right)\left(2b\right)+2\left(a\right)\left(3c\right)+2\left(2b\right)\left(3c\right)$
$= a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc$

2) $\left(5x-8y-6z\right)^2=\left(5x\right)^2+\left(-8y\right)^2+\left(-6z\right)^2+2\left(5x\right)\left(-8y\right)+2\left(5x\right)\left(-6z\right)+2\left(-8y\right)\left(-6z\right)$
$=25x^2+64y^2+36z^2-80xy-60xz+96yz$

3) $\left(\frac{1}{2}e+\frac{2}{5}f-\frac{3}{4}g\right)^2=\left(\frac{1}{2}e\right)^2+\left(\frac{2}{5}f\right)^2+\left(-\frac{3}{4}g\right)^2+2\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{5}f\right)+2\left(\frac{1}{2}e\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)+$
$2\left(\frac{2}{5}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)=\frac{1}{4}e^2+\frac{4}{25}f^2+\frac{9}{16}g^2+\frac{2}{5}ef-\frac{3}{4}eg-\frac{3}{5}fg$

4) $\left(4a-7b+9c-5d\right)^2=\left(4a\right)^2+\left(-7b\right)^2+\left(9c\right)^2+\left(-5d\right)^2+2\left(4a\right)\left(-7b\right)+2\left(4a\right)\left(9c\right)+$
$2\left(4a\right)\left(-5d\right)+2\left(-7b\right)\left(9c\right)+2\left(-7b\right)\left(-5d\right)+2\left(9c\right)\left(-5d\right)$
$=16a^2+49b^2+81c^2+25d^2-56ab+72ac-40ad-126bc+70bd-90cd$

5) $\left(2p^3+6q-10r^2+t\right)^2=\left(2p^3\right)^2+\left(6q\right)^2+\left(-10r^2\right)^2+t^2+2\left(2p^3\right)\left(6q\right)+2\left(2p^3\right)\left(-10r^2\right)+2\left(2p^3\right)\left(t\right)+$
$2\left(6q\right)\left(-10r^2\right)+2\left(6q\right)\left(t\right)+2\left(-10r^2\right)\left(t\right)$
$=4p^6+36q^2+100r^4+t^2+24p^3q-40p^3r^2+4p^3t-120qr^2+12qt-20r^2t$

6) $\left(\frac{3}{2}h^2j-\frac{7}{4}k^2m^3-\frac{5}{2}n+6p^2q^4s\right)^2=\left(\frac{3}{2}h^2j\right)^2+\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)^2+\left(-\frac{5}{2}n\right)^2+\left(6p^2q^4s\right)^2+$
$2\left(\frac{3}{2}h^2j\right)\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)+2\left(\frac{3}{2}h^2j\right)\left(-\frac{5}{2}n\right)+2\left(\frac{3}{2}h^2j\right)\left(6p^2q^4s\right)+$
$2\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)\left(-\frac{5}{2}n\right)+2\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)\left(6p^2q^4s\right)+2\left(-\frac{5}{2}n\right)\left(6p^2q^4s\right)$
$=\frac{9}{4}h^4j^2+\frac{49}{16}k^4m^6+\frac{25}{4}n^2+36p^4q^8s^2-\frac{21}{4}h^2jk^2m^3-$
$\frac{15}{2}h^2jn+18h^2jp^2q^4s+\frac{35}{4}k^2m^3n-21k^2m^3p^2q^4s-30np^2q^4s$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS

Dos binomios son *conjugados* si difieren sólo por el signo de uno de sus términos.

Ejemplos.

1) $\left(4a+3b\right)$ y $\left(4a-3b\right)$
2) $\left(2k-5j\right)$ y $\left(2k+5j\right)$

Al efectuar el producto de un binomio $a+b$ por su conjugado $a-b$, se tiene:

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

esto significa que *el producto de dos binomios conjugados es igual a la diferencia de los cuadrados de sus términos*.

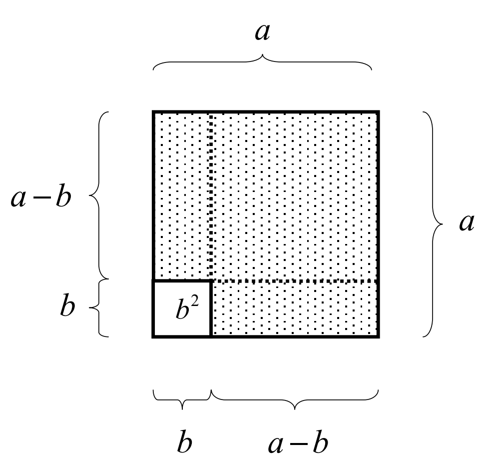
Esto es:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplos.

1) $(k+3)(k-3)=k^2-9$
2) $(3x+2y)(3x-2y)=9x^2-4y^2$
3) $(5a+8b)(5a-8b)=25a^2-64b^2$
4) $(4w^2+7z^3)(4w^2-7z^3)=16w^4-49z^6$
5) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}y\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{9}{25}y^2$
6) $(6jk+4mn)(6jk-4mn)=36j^2k^2-16m^2n^2$
7) $(10r^2t^3v^4+12s^2u^5w)(10r^2t^3v^4-12s^2u^5w)=100r^4t^6v^8-144s^4u^{10}w^2$
8) $(-\alpha+1)(\alpha+1)=1-\alpha^2$

La representación del producto de dos binomios conjugados se efectúa a partir de un cuadrado de lado a y un cuadrado interior de lado b. El área sombreada representa a^2-b^2 y está dada por la suma de los rectángulos $(a-b)a$ y $b(a-b)$, esto es, $(a+b)(a-b)$:



$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Este producto notable corresponde a la multiplicación de binomios cuyo término común es x de la forma $(x+a)$ por $(x+b)$. Al desarrollar el producto se tiene: $(x+a)(x+b)=x^2+xb+xa+ab$, que se puede agrupar como sigue:

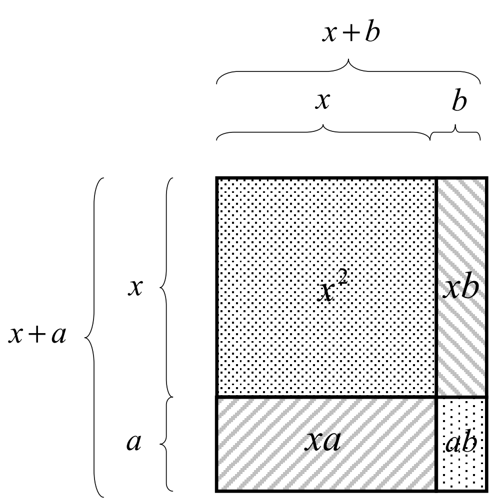
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Esto significa que *el producto de binomios con un término común es el cuadrado del término común, más la suma de los términos distintos multiplicada por el término común y más el producto de los términos distintos*.

Ejemplos.

1) $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+(2)(3)=x^2+5x+6$
2) $(a-1)(a+4)=a^2+(-1+4)a+(-1)(4)=a^2+3a-4$
3) $(2b+5)(2b+3)=(2b)^2+(5+3)(2b)+(5)(3)=4b^2+16b+15$
4) $(3z-6)(3z-7)=(3z)^2+(-6-7)(3z)+(-6)(-7)=9z^2-39z+42$
5) $\left(\frac{7}{4}x-5\right)\left(\frac{7}{4}x-1\right)=\left(\frac{7}{4}x\right)^2+(-5-1)\left(\frac{7}{4}x\right)+(-5)(-1)=\frac{49}{16}x^2-\frac{21}{2}x+5$
6) $(2e^4+8)(2e^4-11)=(2e^4)^2+(8-11)(2e^4)+(8)(-11)=4e^8-6e^4-88$
7) $(5\alpha^3\beta^2-4)(5\alpha^3\beta^2+7)=(5\alpha^3\beta^2)^2+(-4+7)(5\alpha^3\beta^2)+(-4)(7)=25\alpha^6\beta^4+15\alpha^3\beta^2-28$
8) $(-k+5)(-k+12)=(-k)^2+(5+12)(-k)+(5)(12)=k^2-17k+60$

Para representar el producto de dos binomios con un término común se utiliza un cuadrado de lado x. A uno de los lados se le agrega una cantidad a y a otro se le agrega una cantidad b, por lo que se forma una superficie con cuatro regiones:



$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

El área total que es $(x+a)(x+b)$, también está dada por la suma de cada una de las áreas, es decir $x^2+xb+xa+ab$, que en forma simplificada es: $x^2+(a+b)x+ab$.

CUBO DE UN BINOMIO

El desarrollo del cubo del binomio $a+b$ se puede obtener multiplicando este binomio por su cuadrado:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\end{aligned}$$

que simplificado es:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Por su parte, el desarrollo del cubo del binomio $a-b$, se obtiene de forma similar:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3\end{aligned}$$

que simplificado es:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

En las fórmulas anteriores a y b pueden ser cualquier expresión algebraica y tener cualquier signo. Por lo tanto, segunda la fórmula es un caso particular de la primera ya que:
$(a-b)^3 = [a+(-b)]^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)+b^3 = a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$

Considerando lo anterior, se aprecia que el desarrollo anterior presenta la siguiente estructura:

El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado del primer término por el segundo más el triple del primer término por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.

Ejemplos.

1) $(a+2)^3 = a^3+3\left(a^2\right)(2)+3(a)\left(2^2\right)+2^3 = a^3+3\left(a^2\right)(2)+3(a)(4)+8 = a^3+6a^2+12a+8$

2) $(k-5)^3 = k^3+3\left(k^2\right)(-5)+3(k)(-5)^2+(-5)^3 = k^3+3\left(k^2\right)(-5)+3(k)(25)-125$
$= k^3-15k^2+75k-125$

3) $(4x+y)^3 = (4x)^3+3(4x)^2(y)+3(4x)\left(y^2\right)+y^3 = 64x^3+3\left(16x^2\right)(y)+3(4x)\left(y^2\right)+y^3$
$= 64x^3+48x^2y+12xy^2+y^3$

4) $(6c-7d)^3 = (6c)^3+3(6c)^2(-7d)+3(6c)(-7d)^2+(-7d)^3$
$= 216c^3+3\left(36c^2\right)(-7d)+3(6c)\left(49d^2\right)-343d^3 = 216c^3-756c^2d+882cd^2-343d^3$

5) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b\right)^3 = \left(\frac{1}{3}a\right)^3+3\left(\frac{1}{3}a\right)^2\left(\frac{2}{5}b\right)+3\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{2}{5}b\right)^2+\left(\frac{2}{5}b\right)^3$

$$=\frac{1}{27}a^3+3\left(\frac{1}{9}a^2\right)\left(\frac{2}{5}b\right)+3\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{4}{25}b^2\right)$$
$$+\frac{8}{125}b^3=\frac{1}{27}a^3+\frac{2}{15}a^2b+\frac{4}{25}ab^2+\frac{8}{125}b^3=\frac{1}{27}a^3+\frac{2}{15}a^2b+\frac{4}{25}ab^2+\frac{8}{125}b^3$$

6) $\left(4x^3-8y^2\right)^3=\left(4x^3\right)^3+3\left(4x^3\right)^2\left(-8y^2\right)+3\left(4x^3\right)\left(-8y^2\right)^2+\left(-8y^2\right)^3$

$$=64x^9+3\left(16x^6\right)\left(-8y^2\right)+3\left(4x^3\right)\left(64y^4\right)-512y^6=64x^9-384x^6y^2+768x^3y^4-512y^6$$

7) $(-3a+10)^3=(-3a)^3+3(-3a)^2(10)+3(-3a)(10)^2+(10)^3$

$$=-27a^3+3\left(9a^2\right)(10)+3(-3a)(100)+1000=-27a^3+270a^2-900a+1000$$

8) $(-9z-2)^3=(-9z)^3+3(-9z)^2(-2)+3(-9z)(-2)^2+(-2)^3$

$$=-729z^3+3\left(81z^2\right)(-2)+3(-9z)(4)-8=-729z^3-486z^2-108z-8$$

CUBO DE UN TRINOMIO

El desarrollo de un cubo de trinomio $a+b+c$ se obtiene multiplicando este trinomio por su cuadrado:

$$(a+b+c)^3=(a+b+c)(a+b+c)^2=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)$$
$$=a^3+ab^2+ac^2+2a^2b+2a^2c+2abc+a^2b+b^3+bc^2+2ab^2+2abc+2b^2c$$
$$+a^2c+b^2c+c^3+2abc+2ac^2+2bc^2$$

simplificado queda como:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$$

El resultado consta de diez términos y presenta la siguiente estructura:

El cubo de un trinomio es igual a la suma de los cubos de cada uno de los términos, más el triple producto del cuadrado de cada término por cada uno de los términos restantes más seis veces el producto de los tres términos.

Ejemplos.

1) $(4a+2b+5c)^3=(4a)^3+(2b)^3+(5c)^3+3(4a)^2(2b)+3(4a)(2b)^2+3(4a)^2(5c)$

$$+3(4a)(5c)^2+3(2b)^2(5c)+3(2b)(5c)^2+6(4a)(2b)(5c)$$
$$=64a^3+8b^3+125c^3+3\left(16a^2\right)(2b)+3(4a)\left(4b^2\right)+3\left(16a^2\right)(5c)$$
$$+3(4a)\left(25c^2\right)+3\left(4b^2\right)(5c)+3(2b)\left(25c^2\right)+6(4a)(2b)(5c)$$
$$=64a^3+8b^3+125c^3+96a^2b+48ab^2+240a^2c+300ac^2$$
$$+60b^2c+150bc^2+240abc$$

2) $(3x-6y-1)^3=(3x)^3+(-6y)^3+(-1)^3+3(3x)^2(-6y)+3(3x)(-6y)^2+3(3x)^2(-1)$

$$+3(3x)(-1)^2+3(-6y)^2(-1)+3(-6y)(-1)^2+6(3x)(-6y)(-1)$$
$$=27x^3-216y^3-1+3\left(9x^2\right)(-6y)+3(3x)\left(36y^2\right)+3\left(9x^2\right)(-1)$$

$$+3(3x)(1)+3(36y^2)(-1)+3(-6y)(1)+6(3x)(-6y)(-1)$$
$$=27x^3-216y^3-1-162x^2y+324xy^2-27x^2+9x-108y^2-18y+108xy$$

3) $$\left(\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}f-\frac{3}{4}g\right)^3=\left(\frac{1}{2}e\right)^3+\left(\frac{2}{3}f\right)^3+\left(-\frac{3}{4}g\right)^3+3\left(\frac{1}{2}e\right)^2\left(\frac{2}{3}f\right)+3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{3}f\right)^2$$
$$+3\left(\frac{1}{2}e\right)^2\left(-\frac{3}{4}g\right)+3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)^2+3\left(\frac{2}{3}f\right)^2\left(-\frac{3}{4}g\right)+3\left(\frac{2}{3}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)^2$$
$$+6\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{3}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)$$
$$=\frac{1}{8}e^3+\frac{8}{27}f^3-\frac{27}{64}g^3+3\left(\frac{1}{4}e^2\right)\left(\frac{2}{3}f\right)+3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{4}{9}f^2\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{4}e^2\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)+3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{9}{16}g^2\right)+3\left(\frac{4}{9}f^2\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)+3\left(\frac{2}{3}f\right)\left(\frac{9}{16}g^2\right)$$
$$+6\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{3}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)$$
$$=\frac{1}{8}e^3+\frac{8}{27}f^3-\frac{27}{64}g^3+\frac{1}{2}e^2f+\frac{2}{3}ef^2-\frac{9}{16}e^2g+\frac{27}{32}eg^2$$
$$-f^2g+\frac{9}{8}fg^2-\frac{3}{2}efg$$

4) $$\left(-5\beta^2-4\delta^3+10\lambda^4\right)^3=\left(-5\beta^2\right)^3+\left(-4\delta^3\right)^3+\left(10\lambda^4\right)^3+3\left(-5\beta^2\right)^2\left(-4\delta^3\right)$$
$$+3\left(-5\beta^2\right)\left(-4\delta^3\right)^2+3\left(-5\beta^2\right)^2\left(10\lambda^4\right)+3\left(-5\beta^2\right)\left(10\lambda^4\right)^2$$
$$+3\left(-4\delta^3\right)^2\left(10\lambda^4\right)+3\left(-4\delta^3\right)\left(10\lambda^4\right)^2+6\left(-5\beta^2\right)\left(-4\delta^3\right)\left(10\lambda^4\right)$$
$$=-125\beta^6-64\delta^9+1000\lambda^{12}+3\left(25\beta^4\right)\left(-4\delta^3\right)+3\left(-5\beta^2\right)\left(16\delta^6\right)$$
$$+3\left(25\beta^4\right)\left(10\lambda^4\right)+3\left(-5\beta^2\right)\left(100\lambda^8\right)+3\left(16\delta^6\right)\left(10\lambda^4\right)+3\left(-4\delta^3\right)\left(100\lambda^8\right)$$
$$+6\left(-5\beta^2\right)\left(-4\delta^3\right)\left(10\lambda^4\right)$$
$$=-125\beta^6-64\delta^9+1000\lambda^{12}-300\beta^4\delta^3-240\beta^2\delta^6+750\beta^4\lambda^4$$
$$-1{,}500\beta^2\lambda^8+480\delta^6\lambda^4-1{,}200\delta^3\lambda^8+1{,}200\beta^2\delta^3\lambda^4$$

SUMA Y RESTA DE CUBOS

Para obtener la suma de dos cubos de la forma a^3+b^3 se efectúa el siguiente producto:

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

cuyo desarrollo es: $a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

y simplificando se tiene: a^3+b^3

Esto significa que:

La suma de los cubos de dos términos es igual al producto de la suma de los términos, por un trinomio formado por el cuadrado del primer término, menos el producto de los dos, más el cuadrado del segundo.

Es decir:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

Ejemplos.
Comprobar que los productos indicados representan la suma de dos cubos.

1) $(x+1)(x^2-x+1)$
Solución.
$(x+1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1=x^3+1^3$
2) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
Solución:
$(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)=8a^3-12a^2b+18ab^2+12a^2b-18ab^2+27b^3$
$=8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$
3) $(4k^2+5j^6)(16k^4-20k^2j^6+25j^{12})$
Solución:
$(4k^2+5j^6)(16k^4-20k^2j^6+25j^{12})=64k^6-80k^4j^6+100k^2j^{12}+80j^6k^4-100k^2j^{12}+125j^{18}$
$=64k^6+125j^{18}=(4k^2)^3+(5j^6)^3$

Similarmente, para obtener la diferencia de dos cubos de la forma a^3-b^3 se efectúa el siguiente producto:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

cuyo desarrollo es: $a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

y simplificando se tiene: a^3-b^3

Esto significa que:

La diferencia de los cubos de dos términos es igual al producto de la diferencia de los términos, por un trinomio formado por el cuadrado del primer término, más el producto de los dos, más el cuadrado del segundo.

Es decir:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Ejemplos.
Comprobar que los productos indicados representan la diferencia de dos cubos

1) $(y-2)(y^2+2y+4)$
Solución.

$(y-2)(y^2+2y+4)=y^3+2y^2+4y-2y^2-4y-8=y^3-8=y^3-2^3$

2) $(5p-6q)(25p^2+30pq-36q^2)$

Solución:

$$(5p-6q)(25p^2+30pq-36q^2)=125p^3+150p^2q-180pq^2-150qp^2-180pq^2-216q^3$$
$$=125p^3-216q^3=(5p)^3-(6q)^3$$

3) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{10}ab+\frac{9}{25}b^2\right)$

Solución:

$$\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{10}ab+\frac{9}{25}b^2\right)=\frac{1}{8}a^3+\frac{3}{20}a^2b+\frac{9}{50}ab^2-\frac{3}{20}a^2b-\frac{9}{50}ab^2-\frac{27}{125}b^3$$
$$=\frac{1}{8}a^3-\frac{27}{125}b^3=\left(\frac{1}{2}a\right)^3-\left(\frac{3}{5}b\right)^3$$

BINOMIO DE NEWTON

El teorema del binomio, también llamado *binomio de Newton*, expresa la enésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio $(a+b)^n$ posee singular importancia ya que aparece con mucha frecuencia en Matemáticas y posee diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

Si el binomio de la forma $(a+b)$ se multiplica sucesivamente por si mismo se obtienen las siguientes potencias:

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=\underbrace{(a+b)(a+b)}_{2\ veces}=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{3\ veces}=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=\underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{4\ veces}=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=\underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{5\ veces}=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=\underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{6\ veces}=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

De los desarrollos anteriores, se observa que:

- El desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos
- El exponente de a empieza con n en el primer término y va disminuyendo en uno con cada término, hasta cero en el último

- El exponente de b empieza con cero en el primer término y va aumentando en uno con cada término, hasta n en el último
- Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n
- El coeficiente del primer término es uno y el del segundo es n
- El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de a dividido entre el número que indica el orden de ese término
- Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

Ejemplo.

$$(a+b)^6 = \underset{\underset{es\,1}{\uparrow}}{a^6} + \underset{\underset{\frac{1(6)}{1}}{\uparrow}}{6a^5b} + \underset{\underset{\frac{6(5)}{2}}{\uparrow}}{15a^4b^2} + \underset{\underset{\frac{15(4)}{3}}{\uparrow}}{20a^3b^3} + \underset{\underset{\frac{20(3)}{4}}{\uparrow}}{15a^2b^4} + \underset{\underset{\frac{15(2)}{5}}{\uparrow}}{6ab^5} + \underset{\underset{\frac{6(1)}{6}}{\uparrow}}{b^6}$$

Aplicando las consideraciones expuestas en los incisos para el caso general se tiene:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1(2)}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1(2)(3)}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1(2)(3)(4)}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1(2)(3)(4)(5)}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Se define como *factorial* de un número natural n al producto de n por todos los números que le preceden hasta el uno. Se denota mediante $n!$:

$$n! = 1(2)(3)(4)\cdots(n-1)(n)$$

Por definición, el factorial de cero es uno: $0! \equiv 1$

Ejemplos.

$3! = 1(2)(3) = 6$

$5! = 1(2)(3)(4)(5) = 120$

$8! = 1(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = 40{,}320$

$14! = 1(2)(3)(4)\cdots(13)(14) = 87{,}178'291{,}200$

Ahora, si se introduce la notación factorial, la fórmula del binomio puede escribirse así:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Ejemplos.

1) Obtener el desarrollo de $(3x-4y)^4$

Solución.

Haciendo $a=3x$, $b=-4y$ y $n=4$

Aplicando la fórmula se tiene:

$$(3x-4y)^4 = (3x)^4 + \frac{4}{1!}(3x)^3(-4y) + \frac{4(3)}{2!}(3x)^2(-4y)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(3x)(-4y)^3 + (-4y)^4$$

$$\begin{aligned}(3x-4y)^4 &= (3x)^4+\frac{4}{1}(3x)^3(-4y)+\frac{12}{2}(3x)^2(-4y)^2+\frac{24}{6}(3x)(-4y)^3+(-4y)^4\\ &= 81x^4+\frac{4}{1}(27x^3)(-4y)+\frac{12}{2}(9x^2)(16y^2)+\frac{24}{6}(3x)(-64y^3)+256y^4\\ &= 81x^4-432x^3y+864x^2y^2-768xy^3+256y^4\end{aligned}$$

2) Hallar la expansión de $(5x+2y)^5$

Solución.

Haciendo $a=5x$, $b=2y$ y $n=5$

Aplicando la fórmula se tiene:

$$\begin{aligned}(5x+2y)^5 &= (5x)^5+\frac{5}{1!}(5x)^4(2y)+\frac{5(4)}{2!}(5x)^3(2y)^2+\frac{5(4)(3)}{3!}(5x)^2(2y)^3+\frac{5(4)(3)(2)}{4!}(5x)(2y)^4\\ &\quad+(2y)^5\\ &= 3{,}125x^5+5(625x^4)(2y)+10(125x^3)(4y^2)+10(25x^2)(8y^3)+5(5x)(16y^4)+32y^5\\ &= 3{,}125x^5+6{,}250x^4y+5{,}000x^3y^2+2{,}000x^2y^3+400xy^4+32y^5\end{aligned}$$

En el desarrollo binomial:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+\frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2}+\frac{n}{1!}ab^{n-1}+b^n$$

Analizando las características del desarrollo y si se decide llamar a un término cualquiera del desarrollo como *r-ésimo término*, se observa que:

- El exponente de b es: $r-1$
- El exponente de a es: $n-(r-1)=n-r+1$
- El denominador del coeficiente es: $(r-1)!$
- El numerador del coeficiente es: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)$

En consecuencia el r-ésimo término de la expansión de $(a+b)^n$ es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Ejemplos.

1) Encontrar el tercer término del desarrollo $(2k-6m)^5$

Solución.

$a=2k,\ b=-6m,\ \ n=5,\ r=3$

Aplicando la expresión se tiene: $\frac{(5)(4)}{2!}(2k)^3(-6m)^2=10(8k^3)(36m^2)=2{,}880k^3m^2$

2) Calcular el sexto término del desarrollo $(x+4y)^7$

Solución.

$a = x,\ b = 4y,\ \ n = 7,\ r = 6$

Aplicando la expresión se tiene: $\dfrac{7(6)(5)(4)(3)}{5!}x^2(4y)^5 = 21x^2\left(1024y^5\right) = 21{,}504x^2y^5$

El triángulo de Pascal es un esquema que tiene como característica que cada uno de los componentes de sus filas representa los coeficientes del desarrollo binomial.

Se construye de la siguiente manera: Se empieza por el 1 de la cumbre. De una fila a la siguiente se escriben los números con un desfase de medio lugar o casilla para que cada casilla tenga dos números justo arriba, en la fila anterior. Cada extremo de la fila tiene un 1 y el valor que se escribe en una casilla es la suma de los números que están encima.

Después, se efectúa una relación entre los números del triángulo de Pascal y la suma de las potencias de a y b, de forma que los coeficientes se asignan en el mismo orden en que aparecen. Gráficamente esto es:

$(a+b)^0$	**1**
$(a+b)^1$	**1 1**
$(a+b)^2$	**1 2 1**
$(a+b)^3$	**1 3 3 1**
$(a+b)^4$	**1 4 6 4 1**
$(a+b)^5$	**1 5 10 10 5 1**
$(a+b)^6$	**1 6 15 20 15 6 1**
$(a+b)^7$	**1 7 21 35 35 21 7 1**

Por ejemplo, para encontrar los coeficientes del desarrollo $(a+b)^6$, se le aplican los factores de la séptima fila, tal y como se muestra en la siguiente figura:

a^6	a^5b	a^4b^2	a^3b^3	a^2b^4	ab^5	b^6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	6	15	20	15	6	1
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Ejemplos.

1) Aplicar el triángulo de Pascal para desarrollar $(3x-2y)^4$

Solución.

Ubicando los coeficientes respectivos se tiene:

$$
\begin{aligned}
(3x-2y)^4 &= (3x)^4 + 4(3x)^3(-2y) + 6(3x)^2(-2y)^2 + 4(3x)(-2y)^3 + (-2y)^4 \\
&= 81x^4 + 4(27x^3)(-2y) + 6(9x^2)(4y^2) + 4(3x)(-8y^3) + 16y^4 \\
&= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4
\end{aligned}
$$

2) Encontrar la expansión de $(5a^4+4b^3)^6$ aplicando el triángulo de Pascal.

Solución.

Ubicando los coeficientes respectivos se tiene:

$$
\begin{aligned}
(5a^4+4b^3)^6 &= (5a^4)^6 + 6(5a^4)^5(4b^3) + 15(5a^4)^4(4b^3)^2 + 20(5a^4)^3(4b^3)^3 + 15(5a^4)^2(4b^3)^4 \\
&\quad + 6(5a^4)(4b^3)^5 + (4b^3)^6 \\
&= 15{,}625a^{24} + 6(3{,}125a^{20})(4b^3) + 15(625a^{16})(16b^6) + 20(125a^{12})(64b^9) \\
&\quad + 15(25a^8)(256b^{12}) + 6(5a^4)(1{,}024b^{15}) + 4{,}096b^{18} \\
&= 15{,}625a^{24} + 75{,}000a^{20}b^3 + 150{,}000a^{16}b^6 + 160{,}000a^{12}b^9 + 96{,}000a^8b^{12} \\
&\quad + 30{,}720a^4b^{15} + 4{,}096b^{18}
\end{aligned}
$$