MATEMÁTICAS BÁSICAS

TEOREMA DEL BINOMIO

CONCEPTO DEL TEOREMA DEL BINOMIO

El teorema del binomio, también llamado binomio de Newton, expresa la enésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio $(a+b)^n$ posee singular importancia ya que aparece con mucha frecuencia en Matemáticas y posee diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

FÓRMULA GENERAL DEL BINOMIO

Sea un binomio de la forma $(a+b)$.

Si a este binomio se le multiplica sucesivamente por si mismo se obtienen las siguientes potencias:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = \underbrace{(a+b)(a+b)}_{2\ veces} = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{3\ veces} = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{4\ veces} = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{5\ veces} = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{6\ veces} = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

De lo anterior, se aprecia que:

a) El desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos

b) Las potencias de a empiezan con n en el primer término y van disminuyendo en cada término, hasta cero en el último

c) Las potencias de b empiezan con exponente cero en el primer término y van aumentando en uno con cada término, hasta n en el último.

d) Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n.

e) El coeficiente del primer término es uno y el del segundo es n.

f) El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de a dividido entre el número que indica el orden de ese término.

g) Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

Ejemplo.

$$(a+b)^5 = \underset{\substack{\uparrow \\ es\,1}}{a^5} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1(5)}{1}}}{5a^4b} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{5(4)}{2}}}{10a^3b^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{10(3)}{3}}}{10a^2b^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{10(2)}{4}}}{5ab^4} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{5(1)}{5}}}{b^5}$$

Aplicando las consideraciones expuestas en los incisos para el caso general se tiene:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1(2)}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1(2)(3)}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1(2)(3)(4)}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1(2)(3)(4)(5)}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Ahora, si se introduce la notación factorial, la fórmula del binomio puede escribirse así:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Ejemplo.

Obtener el desarrollo de $(2x-5y)^4$

Solución.

Haciendo $a = 2x$ y $b = -5y$

Aplicando la fórmula se tiene:

$$(2x-5y)^4 = (2x)^4 + \frac{4}{1!}(2x)^3(-5y) + \frac{4(3)}{2!}(2x)^2(-5y)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(2x)(-5y)^3 + (-5y)^4$$

$$(2x-5y)^4 = (2x)^4 + \frac{4}{1}(2x)^3(-5y) + \frac{12}{2}(2x)^2(-5y)^2 + \frac{24}{6}(2x)(-5y)^3 + (-5y)^4$$

$$(2x-5y)^4 = 16x^4 - 160x^3y + 600x^2y^2 - 1000xy^3 + 625y^4$$

EL R-ÉSIMO TERMINO DEL DESARROLLO BINOMIAL

En el desarrollo binomial:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2} + \frac{n}{1!}a^1b^{n-1} + b^n$$

si se decide llamar a un termino cualquiera del desarrollo como *r-ésimo termino*, entonces se encuentra que:

- El exponente del término b del binomio es: $r-1$
- El exponente del término a del binomio es: $n-(r-1) = n-r+1$
- El denominador del coeficiente es: $(r-1)!$
- El numerador del coeficiente es: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)$

En consecuencia el r-ésimo termino de la expansión de $(a+b)^n$ es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Ejemplo.
Encontrar el quinto término del desarrollo $(x+5y)^6$

Solución.
$a=x,\ b=5y,\ n=6,\ r=5$, aplicando la expresión: $\frac{6(5)(4)(3)}{4!}x^2(5y)^4=15x^2(625y^4)=9{,}375x^2y^4$

TEOREMA DEL BINOMIO EXPRESADO A TRAVÉS DE COMBINACIONES

El desarrollo de la expresión $(a+b)^n$ también se puede obtener aplicado la teoría del análisis combinatorio.

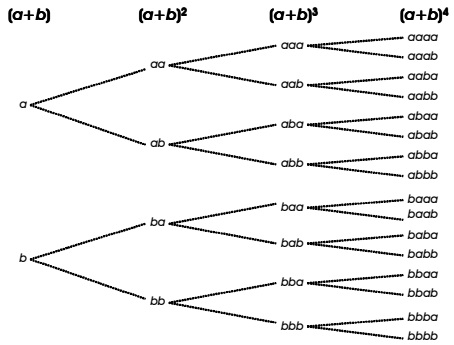
Si se multiplica el binomio por si mismo de forma reiterada se obtiene:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb=a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= (aa+ab+ba+bb)(a+b)=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb\\
&= a^3+3a^2b+3b^2+b^3\\
(a+b)^4 &= (aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb)(a+b)=aaaa+aaab+aaba+aabb\\
&\quad +abaa+abab+abba+abbb+baaa+baab+baba+babb+bbaa+bbab+bbba+bbbb\\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

Puede observarse que el número de términos o sumandos de $(a+b)^3$ es ocho y es el doble que el de $(a+b)^2$, ya que los términos se obtienen añadiendo al final de los cuatro una a o una b. Por su parte, el número de términos de $(a+b)^4$ es 16, ya que se añade al final de cada uno de los ocho términos de $(a+b)^3$ una a o una b.

De forma similar, para obtener $(a+b)^5$, se procedería de la misma manera, partiendo de $(a+b)^4$ y se obtendrían 32 términos.

Por ejemplo, los términos del desarrollo $(a+b)^4$ pueden obtenerse a través de un diagrama de árbol:



Si se suman los términos de cada columna, se obtienen respectivamente los desarrollos para $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ y $(a+b)^4$. Cada término se obtiene de la columna anterior añadiendo al final la letra a o la letra b.

Como las letras que aparecen están multiplicando entre sí, la secuencia $abaa$ (por ejemplo) no es otra cosa que a^3b, y por tanto, es igual a las secuencias $baaa$, $aaba$ y $aaab$.

Lo que se tiene que encontrar es ¿cuántas veces aparece a^4, cuántas a^3b, cuántas a^2b^2, cuántas ab^3, y cuántas b^4? A fin de determinar esto, se aplicará el concepto de combinaciones antes expuesto.

Como se definieron, las combinaciones de p elementos tomados de q en q, son las posibles formas de hacer arreglos de q elementos, escogiéndolos de un conjunto de p elementos, con $q < p$, de modo que dos de esos arreglos son distintos sólo si tienen algún elemento diferente (es decir, si tienen los mismos q elementos, aunque estén colocados en diferente orden, se considera el mismo grupo).

Por ejemplo, para calcular $\binom{4}{2}$, se deben formar grupos de dos elementos, escogiéndolos de entre cuatro elementos dados. Suponiendo que los elementos están numerados del 1 al 4. Entonces los grupos de dos elementos serán: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}.

Regresando al desarrollo de $(a+b)^4$, los términos con dos b pueden tenerlas situadas en los lugares 1º y 2º, 1º y 3º, 1º y 4º, 2º y 3º, 2º y 4º, y 3º y 4º (no hay distinción entre el caso 1º y 2º y el caso 2º y 1º). Por tanto el término con dos b del desarrollo de $(a+b)^4$, es decir, el término a^2b^2, aparece un número de veces igual al número $C_2^4 = \binom{4}{2} = 6$. De igual modo, los términos de $(a+b)^4$ con una b aparecen un número de veces igual a $C_1^4 = \binom{4}{1} = 4$. Siguiendo el mismo razonamiento se tiene que:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

De acuerdo a lo anterior, se puede llegar a una generalización del desarrollo del binomio:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

que en forma condensada se puede escribir como:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad n \geq 1$$

que es el teorema del binomio expresado a través de combinaciones.

Para encontrar el r-ésimo término del desarrollo se aplica la siguiente expresión:

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Ejemplo.
Aplicando el binomio de Newton desarrollar $(x+y)^6$

Solución:

$$\begin{aligned}
(x+y)^6 &= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{6-k}y^k \\
&= \binom{6}{0}x^6+\binom{6}{1}x^5y+\binom{6}{2}x^4y^2+\binom{6}{3}x^3y^3+\binom{6}{4}x^2y^4+\binom{6}{5}xy^5+\binom{6}{6}y^6 \\
&= \frac{6!}{0!(6-0)!}x^6+\frac{6!}{1!(6-1)!}x^5y+\frac{6!}{2!(6-2)!}x^4y^2+\frac{6!}{3!(6-3)!}x^3y^3+\frac{6!}{4!(6-4)!}x^2y^4+ \\
&+\frac{6!}{5!(6-5)!}xy^5+\frac{6!}{6!(6-0)!}y^6 \\
&= \frac{720}{0!(6!)}x^6+\frac{720}{1!(5!)}x^5y+\frac{720}{2!(4!)}x^4y^2+\frac{720}{3!(3!)}x^3y^3+\frac{720}{4!(2!)}x^2y^4+\frac{720}{5!(1!)}xy^5+\frac{720}{6!(0!)}y^6 \\
&= \frac{720}{1(720)}x^6+\frac{720}{1(120)}x^5y+\frac{720}{2(24)}x^4y^2+\frac{720}{6(6)}x^3y^3+\frac{720}{24(2)}x^2y^4+\frac{720}{120(1)}xy^5+\frac{720}{720(1)}y^6 \\
&= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6
\end{aligned}$$

Ejemplo.
Obtener el cuarto término de la expresión $(x-y)^{20}$

Solución.
Sustituyendo $n=20,\ r=4$:

$$\begin{aligned}
\binom{20}{4-1}x^{20-4+1}(-y)^{4-1} &= \binom{20}{3}x^{17}(-y)^3=\frac{20!}{3!(20-3)!}x^{17}(-y)^3=\frac{20!}{3!(17!)}x^{17}(-y)^3 \\
&= \frac{20(19)(18)}{6}x^{17}(-y)^3=-1140x^{17}y^3
\end{aligned}$$

TRIÁNGULO DE PASCAL

El triángulo de Pascal es un esquema triangular de números en cuyo vértice hay un uno que corresponde a $(a+b)^0=1$. En el segundo renglón hay dos números uno que corresponderán a los coeficientes de a y b respectivamente. La fila siguiente se obtiene sumando los dos números inmediatos a él en la fila precedente y luego se le agrega un uno a cada extremo de la fila.

Después, se efectúa una relación entre los números del triángulo de Pascal y la suma de las potencias de a y b, de forma que los coeficientes se asignan en el mismo orden en que aparecen. Gráficamente esto es:

$(a+b)^0$								1							
$(a+b)^1$							1		1						
$(a+b)^2$						1		2		1					
$(a+b)^3$					1		3		3		1				
$(a+b)^4$				1		4		6		4		1			
$(a+b)^5$			1		5		10		10		5		1		
$(a+b)^6$		1		6		15		20		15		6		1	
$(a+b)^7$	1		7		21		35		35		21		7		1

Por ejemplo, para encontrar los coeficientes del desarrollo $(a+b)^5$, se le aplican los factores de la fila correspondiente, tal y como se muestra en la siguiente figura:

a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5
1	5	10	10	5	1

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Ejemplo.

Aplicar el triángulo de Pascal para desarrollar $(2a^4+6b^3)^6$

Solución.

Aplicando los coeficientes respectivos se tiene:

$$\begin{aligned}(2a^4+6b^3)^6 &= (2a^4)^6+6(2a^4)^5(6b^3)+15(2a^4)^4(6b^3)^2+20(2a^4)^3(6b^3)^3+15(2a^4)^2(6b^3)^4+\\ &\quad +6(2a^4)(6b^3)^5+(6b^3)^6\\ &= 64a^{24}+1{,}152a^{20}b^3+8{,}640a^{16}b^6+34{,}560a^{12}b^9+77{,}760a^8b^{12}+93{,}312a^4b^{15}+\\ &\quad +46{,}656b^{18}\end{aligned}$$

TEOREMA DEL BINOMIO CON EXPONENTES NEGATIVOS O FRACCIONARIOS

La fórmula general para desarrollar el binomio $(a+b)^n$ también es aplicable en el caso de que el exponente sea fraccionario o negativo, siempre que se cumpla que $a>b$ y $a>0$.

Para el caso de que el exponente sea fraccionario, el desarrollo presenta la siguiente forma:

$$(a+b)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} + \frac{n}{m} a^{\frac{n-m}{m}} b + \frac{n(n-m)}{m^2(2!)} a^{\frac{n-2m}{m}} b^2 + \frac{n(n-m)(n-2m)}{m^3(3!)} a^{\frac{n-3m}{m}} b^3 + \cdots$$

Por su parte, si el exponente es negativo, el desarrollo posee la siguiente forma:

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{2!} a^{-n-2} b^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} a^{-n-3} b^3 + \cdots$$

Nótese como en este caso, los signos de los términos se alternan.

Se aprecia como para ambos casos, el desarrollo posee un número infinito de términos.

Ejemplo.

Obtener los seis primeros términos del desarrollo $(x+y)^{\frac{2}{5}}$

Solución.

$$(x+y)^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{2}{5}} + \frac{2}{5} x^{\frac{-3}{5}} y - \frac{6}{25(2!)} x^{\frac{-8}{5}} y^2 + \frac{48}{125(3!)} x^{\frac{-13}{5}} y^3 - \frac{624}{625(4!)} x^{\frac{-18}{5}} y^4 + \frac{11{,}232}{3{,}125(5!)} x^{\frac{-23}{5}} y^5 + \cdots$$

$$= x^{\frac{2}{5}} + \frac{2}{5} x^{\frac{-3}{5}} y - \frac{6}{50} x^{\frac{-8}{5}} y^2 + \frac{48}{750} x^{\frac{-13}{5}} y^3 - \frac{624}{15{,}000} x^{\frac{-18}{5}} y^4 + \frac{11{,}232}{375{,}000} x^{\frac{-23}{5}} y^5 + \cdots$$

Ejemplo.

Obtener los siete primeros términos del desarrollo $\dfrac{1}{2x+3y}$

Solución.

$$\frac{1}{2x+3y} = (2x+3y)^{-1}$$

$$(2x+3y)^{-1} = (2x)^{-1} - (2x)^{-2}(3y) + \frac{2}{2!}(2x)^{-3}(3y)^2 - \frac{6}{3!}(2x)^{-4}(3y)^3 + \frac{24}{4!}(2x)^{-5}(3y)^4 +$$

$$-\frac{120}{5!}(2x)^{-6}(3y)^5 + \frac{720}{6!}(2x)^{-7}(3y)^6 + \cdots$$

$$(2x+3y)^{-1} = \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{3}{4}x^{-2}y + \frac{9}{8}x^{-3}y^2 - \frac{27}{16}x^{-4}y^3 + \frac{81}{32}x^{-5}y^4 - \frac{243}{64}x^{-6}y^5 + \frac{729}{128}x^{-7}y^6 + \cdots$$

CÁLCULO DE RAÍCES POR MEDIO DEL BINOMIO

Una de las aplicaciones que tiene el desarrollo del binomio es que pueden extraerse raíces considerando que $\sqrt[n]{1+a} = (1+a)^{\frac{1}{n}}$. Esto es:

$$(1+a)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}(1)^{\frac{1-n}{n}} a + \frac{1-n}{n^2(2!)} 1^{\frac{1-2n}{n}} a^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3(3!)} 1^{\frac{1-3n}{n}} a^3 + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n^4(4!)} 1^{\frac{1-4n}{n}} a^4 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad (1+a)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}a + \frac{1-n}{n^2(2!)}a^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3(3!)}a^3 + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n^4(4!)}a^4 + \cdots$$

Para calcular la raíz enésima de un número cualquiera, se descompone el número en dos sumandos, de forma tal que el primero sea la mayor potencia perfecta del orden de la raíz y posteriormente se expresa como factor común.

Ejemplos.
Calcular de forma aproximada las siguientes raíces:

1) $\sqrt{30}$
Solución.

$$\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = \sqrt{25\left(1+\frac{5}{25}\right)} = 5\sqrt{1+\frac{5}{25}} = 5\left(1+\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1-2}{2^2(2!)}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{(1-2)(1-2(2))}{2^3(3!)}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{(1-2)(1-2(2))(1-3(2))}{2^4(4!)}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \cdots\right)$$

$$\approx 5(1+0.1-0.005+0.0005-0.0000625+\cdots) \approx 5(1.0954375)$$

$$\approx 5.4771875$$

2) $\sqrt[3]{10}$
Solución.

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8+2} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{2}{8}\right)} = 2\sqrt[3]{1+\frac{2}{8}} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1-3}{3^2(2!)}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{(1-3)(1-2(3))}{3^3(3!)}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{(1-3)(1-2(3))(1-3(3))}{3^4(4!)}\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots\right)$$

$$\approx 2(1+0.08333333-0.00694444+0.00096450-0.00016075+\cdots) \approx 2(1.07719264)$$

$$\approx 2.15438528$$

Nótese como los términos cada vez son más pequeños, así que para fines prácticos, basta con calcular los primero cuatro términos para tener una aproximación razonable de la raíz buscada.

3) $\sqrt[4]{260}$
Solución.

$$\sqrt[4]{260} = \sqrt[4]{256+4} = \sqrt[4]{256\left(1+\frac{4}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1+\frac{4}{256}} = 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\approx 4\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{64}\right) + \frac{1-4}{4^2(2!)}\left(\frac{1}{64}\right)^2 + \frac{(1-4)(1-2(4))}{4^3(3!)}\left(\frac{1}{64}\right)^3\right)$$

$$\approx 4(1+0.0390625-0.00002288+0.00000020) \approx 4(1.03903982)$$

$$\approx 4.15615928$$

INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO

Un *interés* es un beneficio que se obtiene al prestar una cantidad de dinero, capital, durante un cierto tiempo. Es decir, el interés es la diferencia entre el monto final y el capital inicial.

Se llama *tasa de interés* o *rédito* al tanto por ciento al que está invertido un capital C en una unidad de tiempo (por lo general se toma como unidad de tiempo el año). La tasa anual de interés se representa por i y se expresa como un porcentaje (5%, por ejemplo) o como su equivalente en forma decimal (0.05). En los cálculos normalmente se utiliza esta última expresión, aunque la información se transmita en forma de tanto por ciento.

Interés simple es el que se obtiene cuando los intereses producidos, durante todo el tiempo que dure una inversión, se deben únicamente al capital inicial (los intereses se retiran).

Interés compuesto es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente (en general, los periodos son anuales) los intereses producidos. Así, al final de cada periodo, el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital en dicho periodo (los intereses se reinvierten).

- *Fórmula del interés simple*

El interés o rédito R que produce un capital es directamente proporcional al capital inicial C, al tiempo t (en años) y a la tasa de interés i (en decimal) :

$$R = C \cdot i \cdot t$$

Ejemplos.

1) Calcular a cuánto asciende el interés simple producido por un capital de $50,000 invertido durante 4 años a una tasa del 6% anual.
Solución
$$R = 50{,}000(0.06)(4) = \$12{,}000$$

2) Calcular el interés simple producido por $20,000 durante 90 días a una tasa de interés anual del 5%.
Solución.
El año bancario posee 360 días, así que: $R = 20{,}000(0.05)\left(\frac{90}{360}\right) = \$250$

3) Al cabo de un año, un banco ha ingresado en una cuenta de ahorro, en concepto de intereses $1,200. La tasa de interés de esa cuenta de ahorro es del 2%. ¿Cuál es el saldo medio (capital) de dicha cuenta en ese año?
Solución.
Sustituyendo: $1{,}200 = C(0.02)(1)$
Despejando el capital: $C = \frac{1{,}200}{(0.02)(1)} = 60{,}000$

4) Un préstamo de $40,000 se convierte al cabo de un año en $48,000. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?
Solución.
Los intereses han ascendido a: $\$48{,}000 - \$40{,}000 = \$8{,}000$
Sustituyendo: $8{,}000 = 40{,}000(i)(1)$

Despejando la tasa de interés: $i = \dfrac{8{,}000}{(40{,}000)(1)} = 0.2 = 20\%$

5) Un capital de $450,000 invertido a una tasa de interés del 3% durante un cierto tiempo, ha supuesto unos intereses de $9,000. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?
Solución.
Sustituyendo: $9{,}000 = 450{,}000(0.03)(t)$

Despejando el tiempo: $t = \dfrac{9{,}000}{(450{,}000)(0.03)} = \dfrac{2}{3}\ años = 8\ meses$

- *Fórmula del interés compuesto*

Sea C un capital invertido durante n años a una tasa i de interés compuesto por cada año.

Durante el primer año el capital produce un interés $C \cdot i$, por tanto, el monto final M_1 será:
$M_1 = C + C \cdot i = C(1+i)$
Después del segundo año, el monto M_1 produce un interés $C(1+i)i = C(i+i^2)$, por lo tanto, el monto final M_2 será:
$M_2 = M_1 + C(i+i^2) = C(1+i) + C(i+i^2) = C(i^2+2i+1) = C(1+i)^2$

Prosiguiendo de forma análoga, se puede concluir que al cabo de n años el capital inicial C, invertido en la modalidad de interés compuesto se convertirá en un monto final M_n:

$$M_n = C(1+i)^n$$

Nótese como es un caso particular del teorema del binomio.

Aunque la fórmula del interés compuesto se dedujo para una tasa de interés anual durante n años, es también válida si los periodos de conversión (capitalización), son semestres, trimestres, días, etc., sólo que se tienen que convertir éstos a años. Por ejemplo:

Si los periodos de conversión son semestrales, la expresión es: $M_n = C\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{2n}$

Si los periodos de conversión son cuatrimestrales, la expresión es: $M_n = C\left(1+\dfrac{i}{3}\right)^{3n}$

Si los periodos de conversión son trimestrales, la expresión es: $M_n = C\left(1+\dfrac{i}{4}\right)^{4n}$

La tasa de interés se encuentra despejando de $M_n = C(1+i)^n$, esto es:

$$\frac{M_n}{C} = (1+i)^n \quad \Rightarrow \quad 1+i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C}} \quad \therefore \quad i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C}} - 1$$

El capital inicial se halla despejando en la fórmula original, esto es:

$$C = \frac{M_n}{(1+i)^n}$$

Por su parte, el tiempo de inversión también se obtiene despejando en la fórmula original, utilizando las propiedades de los logaritmos, esto es:

$$\log_{10} M_n = \log_{10} C(1+i)^n \quad \Rightarrow \quad \log_{10} M_n = \log_{10} C + \log_{10} (1+i)^n$$
$$\Rightarrow \quad \log_{10} M_n = \log_{10} C + n \log_{10} (1+i) \quad \therefore \quad n = \frac{\log_{10} M_n - \log_{10} C}{\log_{10} (1+i)}$$

Ejemplos.

1) Determinar el monto que se obtendrá de un capital de $50,000 después de 5 años a una tasa de interés compuesto anual del 6%.
Solución.

$$M_5 = 50{,}000(1+0.06)^5 \approx 50{,}000(1.338225578) \approx \$66{,}911.27$$

2) Calcular la tasa de interés compuesto anual que se ha aplicado a un capital de $90,000 para que al final de 3 años se haya convertido en $115,000.
Solución.

$$i = \sqrt[3]{\frac{115{,}000}{90{,}000}} - 1 \approx 1.0851 - 1 \approx 0.0851 \approx 8.51\%$$

3) Un cierto capital invertido durante 8 años a una tasa de interés compuesto anual del 12% se ha convertido en $2’000,000. Calcular el capital inicial, sabiendo que los intereses se han pagado semestralmente.
Solución.

De la expresión $M_n = C\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$ se despeja C:

$$C = \frac{M_n}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}} = \frac{2'000{,}000}{\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(8)}} \approx 787{,}292.56$$

4) Una persona solicitó un préstamo bancario de $40,000 para comprar un automóvil a una tasa de 24%. Si no se efectuó ningún pago, calcular el tiempo que transcurrió para que su deuda se transformara en $70,000.
Solución.

$$n = \frac{log_{10} M_n - log_{10} C}{log_{10}(1+i)} = \frac{log_{10} 70{,}000 - log_{10} 40{,}000}{log_{10}(1+0.24)} \approx \frac{4.845098040 - 4.602059991}{0.093421685} \approx 2.6015 \; años$$